Analysis Zusammenfassung

Potenzregeln

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Intervallschreibweise

$[a, b) = [a, b[$

Supremum – obere Schranke

Infimum – untere Schranke

Minimum – kleinster Wert

Maximum – grösster Wert

komplexe Zahlen

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

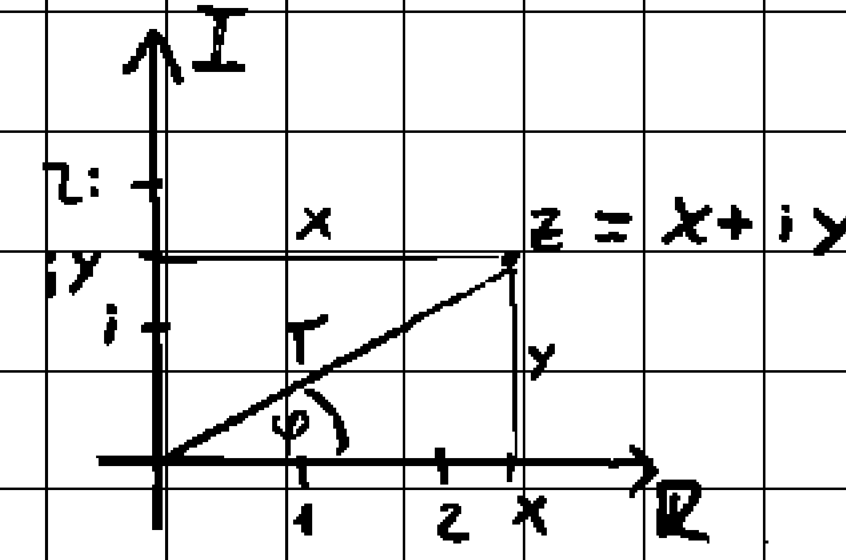
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Polardarstellung komplexer Zahlen



$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \quad \text{falls } y \geq 0$$

$$\varphi = -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) \quad \text{falls } y < 0$$

$$x = r\cos(\varphi)$$

$$y = r\sin(\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exponential Form (Euler Form)

$$z = re^{i\varphi} \quad (\varphi \text{ im Bogenmass})$$

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Rechenregeln

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} \quad \Big| \quad z^{-1} = r^{-1} \cdot e^{-i\varphi}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Wurzel von komplexen Zahlen

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\varphi}{n}}$$

$$w^n = z \implies w_k = \sqrt[n]{r e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right)}} \quad (\text{für } k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Komplexer Logarithmus

$$z = re^{i\varphi} \rightarrow \log(z) = \ln(r) + i\varphi$$

$$z^w = e^{w\log(z)}$$

Summen regeln

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=0}^{n} c\cdot a_k = c\sum_{k=0}^{n} a_k$$

Produkt

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$$

Wurzelregeln

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$a\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\cdot b}$$

$$-a\cdot\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n\cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

Dreiecksungleichung

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Vollständige Induktion

Induktionsanfang: wir zeigen, dass die Aussage für eine gegebene Zahl stimmt (meistens 1)

Induktionsschritt: $n \to (n+1)$

Wir zeigen, dass die Aussage nun auch für $n+1$ gilt.

setze auf der einen Seite der Rechnung $(n+1)$ für n ein

und auf der anderen Seite z.B addiere $(n+1)$ zum ganzen Term

Funktionen

$f: D \to M$

$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$

D = Definitionsbereich

M = Wertebereich

$f(D)$ = Bildmenge

$f(x)$ = Bild- / Funktions-Wert

Urbild(menge)

$B \subseteq M$

$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}$ = Urbild

Injektiv

Jeder Wert des Definitionsbereichs wird auf einen anderen Wert des Wertebereiches abgebildet.
Im Wertebereich kann es aber auch "nicht belegte" Werte haben

Surjektiv

Jeder Wert des Definitionsbereichs wird auf einen Wert des Wertebereiches abgebildet. Jeder Wert ist "belegt"
Doppelbelegungen im Wertebereich sind möglich.

bijektiv

Definitionsbereich wird 1 zu 1 auf Wertebereich abgebildet.
keine Doppelbelegungen & keine nicht belegten Werte

Umkehrfunktion

$f^{-1}(x)$ | Funktion nach y auflösen; y wird x | $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Monotonie

Streng monoton wachsend $f \Uparrow$

für ansteigende x-Werte steigen auch die y-Werte

streng monoton fallend $f \Downarrow$

für ansteigende x-Werte fallen die y-Werte

monoton wachsend / fallend

falls gilt $\leq$ oder $\geq$

Streng monotone, reelle Funktionen sind injektiv

Potenzfunktionen ($f(x) = x^n$) sind bijektiv

Exponentialfunktionen ($f(x) = a^x$) hat als Umkehrfunktion eine

Logarithmusfunktion ($f^{-1}(x) = \log_a(x)$)

Verkettung von monotonen Funktionen gibt wieder monotone Funktionen:

wachsend, wenn beide Funktionen im gleichen Sinn monoton sind

fallend, wenn die Funktionen in verschiedenem Sinn monoton sind.

Beschränktheit

nach oben beschränkt

$f(x) \leq k$ | $k \rightarrow$ obere Schranke

nach unten beschränkt

$f(x) \geq k$ | $k \rightarrow$ untere Schranke

beschränkt

es existiert eine obere- & untere Schranke

unbeschränkt

es existieren keine Schranken

Mächtigkeit

endliche Mengen mit gleich vielen Elementen sind gleich Mächtig

Symmetrie

gerade

Eine Funktion heisst gerade, wenn $f(-x) = f(x)$

ungerade

Eine Funktion heisst ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$

Quadratishe Gleichung

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kubishe Gleichungen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad \| \; x = z - \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow z^3 + pz + q = 0 \qquad \| \; p = b - \frac{a^2}{3}$$

$$\| \; q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$$

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Polynomdivision

$$(3x^4 + x^3 \quad - 2x) : (x^2 + 1) = 3x^2 + x - 3 - \frac{3x - 3}{x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{l}
-\;(3x^4 + 3x^2) \\
\hline
0 + x^3 - 3x^2 - 2x \\
-\;(x^3 + x) \\
\hline
-3x^2 - 3x \\
-\;(-3x^2 - 3) \\
\hline
\underbrace{-3x - 3}_{\text{Rest}}
\end{array}$$

Nullstellen

Ein Polynom von Grad n hat n Nullstellen

Eine Stelle x_1 ist eine Nullstelle von $p(x)$, wenn das Polynom $p(x)$ sich ohne Rest durch den Linearfaktor $q(x) = s(x)(x - x_1)$ dividieren lässt

Komplexe Nullstellen treten immer in komplex konjugierten Nullstellen auf. $(z \text{ \& } \bar{z})$

Polstellen

Eine Stelle x_0 heisst Polstelle, falls $f(x_0)$ unbeschränkt ist.

Die Funktionswerte gehen gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$

Interpolation

$\Rightarrow$ Annäherung an eine Funktion über gegebene Punkte

Interpolations Formel

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Beispiel

Punkte: $(0,1)$, $(2,3)$, $(3,0)$

$$P_2(x) = 1 \prod_{j=1}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} + 3 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} + 0 \prod_{j=0}^{2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j}$$

$$= \frac{x-2}{0-2} \cdot \frac{x-3}{0-3} + 3 \cdot \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-3}{2-3}$$

$$= -\frac{4}{3}x^2 + \frac{11}{3}x + 1$$

Normiertes Polynom

Ein Polynom ist normiert, wenn der Koeffizient des ersten gliedes 1 ist. z.B $\underline{1 \cdot x^2} + 2x + 1$

Asymtote

Rechne die Polynomdivision aus und lasse den Rest weg → Ergebnis ist eine Schiefe Asymtote oder eine Asymtomatische Kurve, je nach Grad des Resultates.

An der Stelle an der der Nenner 0 ist, liegt eine senkrechte Asymtote

Haben Zähler & Nenner den selben Grad, dann ist an der Stelle dieser Koeffizienten eine waagrechte Asymtote

$$\left(\frac{6x^3 \ldots}{3x^3 \ldots} \rightarrow y = \frac{6}{3} = 2 \right)$$

Partialbruchzerlegung

Bedingungen für die Durchführung:

- $\deg(P) < \deg(Q)$ für $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
- Nenner muss faktorisiert sein

Bsp

$$\frac{2x^3+3x^2-2x-3}{(x+1)\underbrace{(x-1)^2}_{\text{pro vielfaches folgt ein Bruch}}(x^2+4)} = \underbrace{\overbrace{\frac{A}{x+1}}^{\text{einfache Nullstelle}} \quad \overbrace{\frac{B}{(x-1)^1} \quad \frac{C}{(x-1)^2}}^{\text{mehrfache Nullstelle}} \quad \overbrace{\frac{Dx+E}{x^2+4}}^{\text{komplexe Nullstelle}}}$$

pro Nullstelle im Nenner gibt es im Zähler eine konstante
bei zwei Nullstellen ist eine konstante mal x

$\Rightarrow$ auf beiden Seiten mal den Nenner

$$\Rightarrow 2x^3+3x^2-2x-3 =$$

$$A\cdot(x-1)^2(x^2+4)+B(x+1)(x-1)(x^2+4)+C(x+1)(x^2+4)+(Dx+E)(x+1)(x-1)^2$$

$\underline{x=-1}$: $0 = A\cdot 20 \Rightarrow A=0$

$\underline{x=1}$: $0 = C\cdot 10 \Rightarrow C=0$

$\underline{x=0}$: $-3 = -4B+E \Rightarrow B=1$

$\underline{x=2i}$: $-16i-12-4i-3 = (D\cdot 2i+E)\cdot(2i+1)(2i-1)^2$
$= -5(2iD+E)(2i-1)$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \text{I} & 4 = -2D+2E \\ \text{II} & 3 = -4D-E \end{array}\right\} \text{I}+2\text{II}: 10 = -10D$$

$\Rightarrow D=-1$

$\Rightarrow E=1$

$$x^2+4=0$$
$$x^2=-4$$
$$x=\pm\sqrt{-4}$$
$$x=\pm\sqrt{-1\cdot 4}$$
$$x=\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4}$$
$$x=\pm 2i$$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2+4}$$

Eigenschaften von Exponential Funktionen

1) Da $a^0 = 1$ gilt, geht jede Exponentialfunktion durch $(0,1)$
2) Exponentialfunktionen haben keine Nullstellen
3) Exponentialfunktionen mit $a \neq 1$ sind unbeschränkt

$a > 1 \rightarrow$ streng monoton wachsend
$a < 1 \rightarrow$ streng monoton fallend

Eigenschaften von Logarithmusfunktionen

1) Da $a^0 = 1$ ist, ist $\log_a(1) = 0$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $x = 1$

2) Funktion ist unbeschränkt für $a > 1$ & $a < 1$
3) $\operatorname{Log}_a(x_1 \cdot x_2) = \operatorname{Log}_a(x_1) + \operatorname{Log}_a(x_2)$

$\operatorname{Log}_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \operatorname{Log}_a(x_1) - \operatorname{Log}_a(x_2)$

4) $\operatorname{Log}_a(x^b) = b \cdot \operatorname{Log}_a(x)$
5) $\operatorname{Log}_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
6) $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

Hyperbelfunktionen

Sinus hyperbolicus: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Kosinus hyperbolicus: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Eigenschaften von Hyperbelfunktionen

1) $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$

2) $\sinh(x)$ ist ungerade , $\cosh(x)$ ist gerade

3) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

4) Additionstheoreme:

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

Umkehrfunktionen (Areafunktionen)

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

Tangens- und Kotangens- hyperbolicus

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Trigonometrische Funktionen

Bogenmass (Einheit = Radiant)

$$\text{Winkel in Bogenmass} = \text{Grad} \cdot \frac{2\pi}{360}$$

Sin & cos

$$\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}, \quad \text{cosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

Tan & cot

$$\text{tangens}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

Folgen & Reihen

Folge

- Liste aus Zahlen (Glieder), die einem Muster folgen
  ↳ Jedes Glied hat eine Position → Index
- das Bildungsgesetz beschreibt die Glieder einer Folge
- Werden die Glieder durch vorhergehende berechnet, nennt man das Bildungsgesetz rekursiv
- Haben die Glieder abwechselnde Vorzeichen nennt man die Folge alternierend

Monotonie

Glieder $a_0 - a_n$

monoton wachsend: $a_{n-1} \leq a_n$ | fallend: $a_{n-1} \geq a_n$

streng monoton wachsend: $a_{n-1} < a_n$ | fallend: $a_{n-1} > a_n$

Beschränktheit

Gibt es Werte, die die Folge nie erreicht

→ nach oben / nach unten beschränkt

trifft Beides zu heisst die Folge beschränkt

Konvergenz

Eine Folge konvergiert gegen einen Grenzwert: $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

wenn $a = 0$ → Nullfolge

Teilfolge

Eine ∞ Folge aus einer anderen ∞ Folge ist eine Teilfolge
(z.B: Gerade natürliche Zahlen sind Teil der natürlichen Zahlen)

Divergenz

Eine Folge ohne bestimmbaren Grenzwert heisst divergent

$\to \infty$: bestimmt divergent gegen ∞
$\to -\infty$: bestimmt divergent gegen $-\infty$

Heron Folge

$$h_n = \frac{1}{2}\left(h_{n-1} + \frac{x}{h_{n-1}}\right)$$

$\Rightarrow$ annäherung an Wurzeln durch sich annähernde Seitenlängen eines Rechteckes.

Reihen

Die Summe aus Folgengliedern ist eine Reihe

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Konvergenz & Divergenz

strebt die Reihe einen Wert an $\to$ konvergenz
$\to$ Grenzwert = Summe der Reihe

Divergenz $\to \infty$

Geometrische Reihe

Glieder unterscheiden sich immer um faktor q

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \qquad \text{Grenzwert} = \frac{1}{1-q}$$

Falls $|q| \geq 1 \to$ divergent

Majorantenkriterium

Das Kriterium sagt, dass eine Reihe $\sum a_n$ konvergiert, wenn es eine andere Reihe $\sum b_n$ gibt, die konvergiert und für jedes Glied gilt: $|a_n| \leq b_n$

$\Rightarrow \sum a_n$ wird Majorante genannt.

Minorantenkriterium

Reihe $\sum a_n$ divergiert, wenn $\sum b_n$ divergiert und gilt $a_n \geq b_n$

$\Rightarrow \sum a_n$ wird Minorante genannt

Quotientenkriterium

Untersuchung auf Konvergenz von $\sum a_k$

Grenzwert $q = \left|\frac{a_k+1}{a_k}\right|$

Wenn $q < 1 \rightarrow$ Reihe ist Konvergent

Wenn $q \geq 1 \rightarrow$ Reihe ist Divergent

Rechenregeln

Konvergente Folgen a_n, b_n mit Grenzwert a, b:

$\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

Konvergente Reihen:

$\sum\limits_{k=0}^{n} c \cdot a = c \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ $\quad$ $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \pm \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$

Differenzialrechnung

Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

linksseitiger Grenzwert
annäherung von links ($x < x_0$)

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x)$$

rechtsseitiger Grenzwert
annäherung von rechts ($x > x_0$)

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x)$$

Rechenregeln

f und g Funktionen mit $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$

$$\lim_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot a$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{a}{b}$$

Existiert ein Grenzwert an der Stelle x_0 dann ist f an der Stelle $f(x_0)$ stetig

Asymtotik

Wenn $f(x)$ gegen $\pm\infty$ geht, dann verhält sie sich asymtotisch

elementare Funktionen

$$\lim_{x \to \infty} x^a = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^a} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = (-1)^n \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} e^{ax} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{ax} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

Ableiten

Approximation einer Funktion an einer Stelle x_0 durch eine Gerade:

- zuerst Bilden wir eine Sekante durch x_0 und einem zweiten, nahen Punkt auf der Funktion
- Existiert nun ein Grenzwert, haben wir eine Tangente durch x_0

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Existiert dieser Grenzwert heisst f differenzierbar

dieser Grenzwert heisst Ableitung oder Differenzial

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$$

Ableitungsregeln

Summenregel: $f(x) \pm g(x) \quad = f'(x) \pm g'(x)$

Faktorregel: $c \cdot f(x) \quad = c \cdot f'(x)$

Produktregel: $f(x) \cdot g(x) \quad = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Quotientenregel: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \quad = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Kettenregel: $f(g(x)) \quad = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad = (f \circ g)'(x)$

$$f^{g(x)} \quad = f'^{\,g(x)} \cdot g'(x)$$

Umkehrfunktion: $(f^{-1})'(x) \quad = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Regel von l'hopital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wird verwendet, falls $f(x)$ und $g(x)$ gegen 0 oder $\pm\infty$ gehen

Ableitungen spezieller Funktionen

$c' = 0$	$(cx)' = c$	
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a \lvert x\rvert)' = \frac{1}{x \ln a}$	
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = (\ln a)\, a^x$	$x^x = (1+\ln(x)) \cdot x^x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$(\cosh x)' = -\sinh x$	$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$
$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(\sin(ax))' = a \cdot \cos(ax)$

$(\sin(x^2))' = 2x \cdot \cos(x^2)$

$(\sin x^k)' = (k-1)\, x \cdot \cos x^k$

Monotonie

f ist monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$

f ist monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$

Krümmungsverhalten

f ist konvex, wenn $f''(x) \geq 0$

f ist konkav, wenn $f''(x) \leq 0$

Extremalstellen

f hat bei x_0 ein lokales Maximum, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$

f hat bei x_0 ein lokales Minimum, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$

Wendepunkte

f hat bei x_0 ein Wendepunkt, wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

f hat bei x_0 ein Sattelpunkt, wenn $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Integration

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
$a\,x^n$	$a\,\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$
$a + x^n$	$ax + \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$
x^{-n}	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$

Integrationsregeln

$$\int_a^b f(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

wenn $a, b = \infty \rightarrow \int_a^\infty f(x) = \lim_{c \to \infty} F(c) - F(a)$

wenn $a, b = 0$ und $f(x) = \frac{c}{x}$

$$\rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x} = F(1) - \lim_{c \to 0} F(c)$$

Summenregel

$$\int_a^b f(x) \pm g(x) = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b g(x)$$

Faktorregel

$$\int_a^b c \cdot f(x) = c \cdot \int_a^b f(x)$$

Partielle Integration

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = \left(f(x)\, g(x)\right)\Big|_a^b - \int f'(x)\, g(x)$$

Substitution

$$\int_a^b \sin(x^2)\, x\, dx \Rightarrow u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$x\,dx = \frac{1}{2} du$$

$= \int_a^b \sin(u) \frac{1}{2} du \Rightarrow$ normal lösen, dann rück substituieren

Taylor Polynom

komplizierte Formel $f(x)$ als Polynom ausdrücken

also $x^n + x^{n-1} + .. + x$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(f(x_0)\right)^{(k)}}{k!} (x - x_0)^k}_{\text{Näherung}} + \underbrace{R_n(x, x_0)}_{\text{Rest}}$$

(k) ~ Ableitung

Taylor Polynom n-ten Grades von f an Stelle x_0

∞ differenzierbare Funktion $\rightarrow$ ∞ Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Spezielle Funktionen & ihr Taylorpolynom

$$e^{cx} = 1 + \frac{cx}{1!} + \frac{(cx)^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cx)^k}{k!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 + \ldots + = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Fourierreihen

$f(x)$ annähern durch eine sin, cos funktion

$$F_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right)$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ | a_k, b_k → Fourier koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(k\omega t)\, f(t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(k\omega t)\, f(t)\, dt$$

wenn $f(t)$ gerade ist, dann $b_k = 0$

wenn $f(t)$ ungerade ist, dann $a_k = 0$

↳ Siehe Symetrie

$\Delta = 1$

T = Betrachtungsperiode $\Rightarrow t\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow T = 1$

Funktion mit 2 variabeln

2 Ableitungen (Partielle Ableitung)

↳ 1 mal nach var 1 } Andere variable ist als
1 mal nach var 2 } Parameter zu betrachten

$\frac{\partial f}{\partial x}$ ⇒ nach x Ableiten

$\frac{\partial^k}{\partial x \partial y \dots}$ ⇒ k-te Ableitung. 1. nach x, 2. nach y, etc...

Hesse Matrix

Matrix aus 2. Ableitungen:

$f(x,y)$ ∂^2: $\begin{pmatrix} \partial_x\partial_x & \partial_x\partial_y & \dots \\ \partial_y\partial_x & \partial_y\partial_y & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Determinante der Hesse Matrix $f(x,y)$ (x_0)

$D > 0$ und $\partial_x\partial_x \,/\, \partial_y\partial_y < 0$ ⇒ Lokales Maximum (x_0)

$D > 0$ und $\partial_x\partial_x \,/\, \partial_y\partial_y > 0$ ⇒ Lokales Minimum (x_0)

$D < 0$ ⇒ Sattelpunkt (x_0)

$D = 0$ ⇒ keine Aussage

Gradient

$\text{grad}\, f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ ⇒ resultierendes Gleichungssystem lösen für Nullstellen

↳ mit Hesse Matrix auf Extrema untersuchen

(wenn $\text{grad}\, f(x_0) = 0$, dann Extrema)

Jacobi Matrix

partielle Ableitungen eines Gleichungssystems nach allen Variabeln

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 \cdot x_2 \\ x_2 + x_3^2 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{x_n} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

Stetigkeit

$f(x)$ ist stetig an der Stelle x_0, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Sind alle Komponenten der Jacobi Matrix stetig, ist f stetig differenzierbar

Differenzialgleichung

$y' = 2y + x^2$ $\Rightarrow$ funktion als Lösung

$= f'(x) = 2 \cdot f(x) + x^2$

Differenzquotient

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ $\Rightarrow$ Tangentensteigung

Differenzialgleichung 1. Ordnung lösen

$y' = y^2 \cdot x$ $\left(y' = \frac{dy}{dx} \right)$

- Für y' $\frac{dy}{dx}$ einsetzen
- alle y dy auf eine Seite
- alle x dx auf eine seite
- Integrieren um dx & dy zu killen
- nach y auflösen

$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot x \quad || \cdot dx \quad || : y^2$

$\frac{1}{y^2} dy = x\,dx \quad || \int$

$\int \frac{1}{y^2} dy = \int x\,dx$

$-y^{-1} + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_2 \quad || - c_1$

$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c \quad || \cdot y \quad || : \frac{x^2}{2} \qquad (c = c_2 - c_1)$

$\frac{-1}{\frac{x^2}{2}} + c = y$

Differenzialgleichungen

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

↳ Ordnung = höchste Ableitung (1)

↳ wenn $g(x) = 0$ → homogen sonst inhomogen

↳ Linear, wenn nur Ableitungen und nicht noch z.B Quadrate von y

↳ konstante koeffizienten, wenn $f(x)$ = konstante

$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = c(x)$ ⇒ Linear (homogen wenn $c(x)=0$)

1. Ordnung homogen

$y' + u(x)\, y = 0$

$\dot{y} - \alpha y = 0$ α = konst

allgemeine Lösung

$y(x) = C e^{-U(x)}$ (U = Stamm funktion)

$y(t) = C^{\alpha t}$

1. Ordnung inhomogen

$y' + u(x)\, y = v(x)$

$y(x) = (G(x) + C)\, e^{-U(x)}$

$$\underbrace{G(x) = \text{Stamm von } v(x)\, e^{U(x)}}_{\text{Lösen wie Oben, dann in alg. Lösung einsetzen}}$$

$$y'(t) = c\, y(t) + g(t)$$

$$y(t) = y(t_0)\, e^{c(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{c(t-s)}\, g(s)\, ds$$

Superpositionsprinzip

$y_1(t)$, $y_2(t)$ $\Rightarrow$ Lösungen der homogenen, linearen DGL

$$y''(t) = c_1 y'(t) + c_0 y(t)$$

und Lösungen sind kein Vielfaches, dann sich jede Lösung als Linearkombination $k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$ dieser Lösungen schreiben

2. Ordnung homogen, konstante Koeffizienten

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

$$y''(t) = c_1 y'(t) + c_0 y(t)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{c_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_1}{2}\right)^2 + c_0}$$

charakteristische Gleichung lösen

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Allgemeine Lösung:

- wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
- wenn $\lambda_1 = \lambda_2$: $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$
- wenn $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$: $y(x) = (C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)) e^{\alpha x}$
  $(\lambda_1, \lambda_2 = \alpha + i\beta)$

$\Rightarrow$ C_1, C_2 ergeben sich aus der Anfangsbedingung

$\Rightarrow$ Anfangsbedingungen einsetzen in alg. Lösung

$\hookrightarrow$ Gleichungssystem lösen

Lineare Inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(t) = c_1 y'(t) + c_0 y(t) + g(t)$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = y_h(t) + y_i(t)$$

$y_h(t) \Rightarrow$ allgemeine Lösung von:

$$y_h''(t) = c_1 y_h'(t) + c_0 y_h(t)$$

$y_i(t) \Rightarrow$ spezielle Lösung der gegebenen inh. DGL